ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ
Διδάσκων: Ι. Πουρναράς

Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις

Παρασκευή 8 Σεπτεμβρίου 2017, 9-12 μ.

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

Α.Μ.:

1. Έστω η διαφορική εξίσωση (Ε)

$$(6xy + 2y^2)dx + (6xy + 2x^2)dy = 0.$$

Να βρεθεί ένας ολοκληρωτικός παράγοντας της (Ε) της μορφής $\rho(x,y) = (x+y)^\lambda$, όπου λ είναι κατάλληλος πραγματικός αριθμός. Στη συνέχεια, με χρήση αυτού του ολοκληρωτικού παράγοντα ή με άλλον τρόπο, να επιλυθεί η (Ε).

2. Ας είναι p μία μη αρνητική σταθερά. Να βρεθούν οι δυναμοσειρές λύσεις, γύρω από το σημείο $x_0 = 0$, της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$(1-x^2)y'' - xy' + p^2 y = 0.$$

Στη συνέχεια, να επιλυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών

$$(1-x^2)y'' - xy' + 16y = 0; \; y(0) = 1, \, y'(0) = 0$$

και

$$(1-x^2)y'' - xy' + 25y = 0; \; y(0) = 0, \, y'(0) = 1.$$

3. Μια μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης $L(y) = b$ έχει τις λύσεις

$$y_1(x) = 1 + e^{x^2}, \quad y_2(x) = 1 + xe^{x^2}, \quad y_3(x) = (x+1)e^{x^2} + 1, \quad x \in R.$$

i) Να επιλυθεί η εξίσωση. Ιδιαίτερα να βρεθεί η λύση της y με $y(0) = 1 = y'(0)$.

ii) Να επιλυθεί η εξίσωση $L(y) = x$.

4. i) Να λυθεί η εξίσωση

$$L(y) := y^{(4)} + 2\sqrt{5}y'' + y = 0, \quad x \geq 0.$$

ii) Για την εξίσωση $L(y) = xe^{-x}$, $x \geq 0$, να εξεταστεί αν υπάρχουν α) μη φραγμένες λύσε β) λύσεις y με $lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$ γ) λύσεις με $limsup_{x\to+\infty} y(x) = 2017$.

(*) Ισχύει το συμπέρασμα του iiα) για την εξίσωση $L(y) = p(x)e^{-x}$, $x \geq 0$, με p πολυώνυ πέμπτου βαθμού;

5. i) Να δοθεί ο ορισμός της συνάρτησης Lipschitz σε ένα διάστημα I και να εξετασθεί αν η συνάρτηση f με $f(x) = xy^{1/3}$ είναι Lipschitz σε καθένα από τα διαστήματα $I_1 := [0, 1/3]$ και $I_2 := [1/3, 2017]$.

ii) Να εξετασθούν ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο των λύσεων στα αντίστοιχα διαστήματα, τα προβλήματα αρχικών τιμών

iia) $y' = e^{-y^2} + \frac{xy}{x+1}$, $y(0) = 1$, $x \geq 0$.

iib) $y' = xy^{1/3}$, $y(1) = 0$, $x \geq 1$.

iic) $y' = xy^{1/3}$, $y(1) = 1$, $x \geq 1$.

6. i) Να διατυπωθεί στη γενικότητά του το Θεώρημα το σχετικό με τον τύπο του Liouville και να αποδειχθεί για $n = 3$.

ii) Να εξετασθεί η αλήθεια των προτάσεων:

iia) Αν (E_0) είναι μια ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση n−τάξης ορισμένη σε ένα διάστημα I και $x_0 \in I$, τότε υπάρχει βασικό σύνολο λύσεων $S := \{y_1, ..., y_n\}$ της (E_0) με $W(y_1, ..., y_n)(x_0) = 2017$.

iib) Αν S_1, S_2 είναι βασικά σύνολα λύσεων μιας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης n− τάξης ορισμένης σε ένα διάστημα I, τότε είναι $W(S_1)(x) = cW(S_2)(x), x \in I$ για κάποιο $c \neq 0$.

Ζητούνται απαντήσεις σε 4 από τα θέματα 1-6.
(*) : προαιρετικό θέμα

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ